

基础拓扑学, 2026 年秋

作业 2

上交时间: 10 月 8 日课前

*** 作业不能提前用后续的知识 ***

1. 是否存在满的连续映射 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^2$? 为什么?
2. 构造从 $[0, 1]$ 到 S^2 的连续满映射。
3. 若 X, Y 可分, 证明 $X \times Y$ 可分。
4. 设 Y 是 Hausdorff 空间, $f: X \rightarrow Y$ 连续, 则 f 的图像 $G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ 是 $X \times Y$ 的闭子集。
5. 证明 T_2 公理和 C_2 公理都有可乘性和遗传性。
6. 令 $\mathcal{B} = \{[a, b) \mid a < b\}$ 。证明 $\mathcal{B}$ 所生成的 $\mathbb{R}$ 上的拓扑不是第二可数的。
7. 记 S 为所有无理数的集合, 在 $\mathbb{R}$ 上, 定义 $\mathcal{T}$ 为所有形如 $U \setminus A$ 的子集组成的集合, 其中 U 为 $\mathbb{E}^1$ 中的开集, A 是 S 的子集。
 - (a) 证明 $\mathcal{T}$ 给出了 $\mathbb{R}$ 上可分的拓扑;
 - (b) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 C_1 公理但不满足 C_2 公理;
 - (c) 证明 $\mathcal{T}$ 满足 T_2 公理但不满足 T_3 公理;
 - (d) 证明 $\mathcal{T}$ 在 S 上的子空间拓扑 $\mathcal{T}_S$ 是离散拓扑, 从而 $(S, \mathcal{T}_S)$ 是不可分的。
8. 设 X 满足 T_4 公理, A 是 X 的闭子集, 证明: 任何连续映射 $f: A \rightarrow \mathbb{E}^n$ 可连续扩张到 X 上。
9. 证明度量空间的任意闭子集都是可数多个开集的交。
10. 设 S^n 是 $\mathbb{E}^{n+1}$ 的单位球面。设 X 是度量空间, A 是 X 的闭子集。证明任意连续函数 $f: A \rightarrow S^n$ 可以连续延拓到 A 的一个开邻域 (即连续延拓到 X 中某个包含 A 的开子集)。
11. 设 X 是不可数集合, 在 X 上定义余可数拓扑

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ 至多可数}\}.$$

证明:

- (a) X 是 T_1 空间, 但不是 Hausdorff 空间;
 - (b) X 不可分;
 - (c) X 在任何一点都不满足第一可数性;
 - (d) 若 Y 是 Hausdorff 空间, 则任意连续映射 $f: X \rightarrow Y$ 都是常值映射。
12. 设 X, Y 为拓扑空间, 记

$$\Delta_Y = \{(y, y) : y \in Y\} \subseteq Y \times Y.$$

证明:

- (a) Y 是 Hausdorff 空间, 当且仅当 Δ_Y 在 $Y \times Y$ 中是闭集;
- (b) 若 Y 是 Hausdorff 空间, 且 $f, g: X \rightarrow Y$ 连续, 则等值集

$$E(f, g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

是 X 的闭集;

13. 在 $\mathbb{R}$ 上取由半开区间

$$[a, b), \quad a < b,$$

生成的拓扑, 所得空间记为 $\mathbb{S}$ 。证明:

- (a) $\mathbb{S}$ 是 Hausdorff 空间 (从而是 T_1 空间), 并满足第一可数性;
- (b) $\mathbb{S}$ 是正则空间;
- (c) $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{S}$ 中稠密;
- (d) $\mathbb{S}$ 不满足第二可数性;
- (e) $\mathbb{S}$ 不可度量化。

14. 设 I 是不可数集合, 考虑乘积空间

$$X = [0, 1]^I.$$

证明:

- (a) X 是紧致 Hausdorff 空间, 从而是正规空间;
- (b) 设 $0 = (0)_{i \in I}$ 。证明 0 不存在可数邻域基;
- (c) 推出 X 不可度量化。

15. 令

$$K = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

在 $\mathbb{R}$ 上取由下列集合组成的基:

$$(a, b), \quad (a, b) \setminus K.$$

所得空间记为 $\mathbb{R}_K$ 。证明:

- (a) $\mathbb{R}_K$ 是 Hausdorff 空间;
- (b) $\mathbb{R}_K$ 是第二可数空间;
- (c) K 是闭集;
- (d) 点 0 与闭集 K 不能被不交开集分离;
- (e) 因而 $\mathbb{R}_K$ 不是正则空间, 也不可度量化。