

Problem Set 1

Due on October 12

说明：习题 1 至习题 5 请给出计算、证明或构造步骤，习题 6 至习题十请同时给出相应的程序和运行结果。

习题 1

对线性同余发生器

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \pmod{M}, n = 1, 2, \dots$$

证明若从初值 x_0 出发周期等于 M ，则以 $0 \sim M-1$ 中任何一个整数作为初值时周期都等于 M ；若从某初值 x_0 出发周期小于 M ，则以 $0 \sim M-1$ 中任何一个整数作为初值时周期都小于 M 。

习题 2

设随机变量 X 的分布密度为

$$p(x) = \frac{1}{2} + x, 0 \leq x \leq 1,$$

分别给出用逆变换法、舍选法、复合法生成 X 随机数的算法，并比较三种方法的效率。

习题 3

设随机变量 X 表示成功概率为 p 的独立重复试验中第 r 次成功所需要的试验次数，称 X 服从负二项分布。

- (1) 利用负二项分布与几何分布的关系构造 X 的随机数。
- (2) 直接利用负二项分布的概率分布构造 X 的随机数。

习题 4

设 $X \sim B(n, p)$, k 为满足 $0 \leq k \leq n$ 的给定的整数, 随机变量 Y 的分布函数为 $P(Y \leq y) = P(X \leq y | X \geq k)$ 。记 $\alpha = P(X \geq k)$ 。分别用逆变换法和舍选法生成 Y 的随机数。当 α 取值大的时候还是取值小的时候舍选法不可取?

习题 5

设随机向量 (X, Y) 服从单位圆 $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的均匀分布, $R^2 = X^2 + Y^2$, θ 为 (X, Y) 的极角, 则 R^2 与 θ 独立, $R^2 \sim U(0, 1)$, $\theta \sim U(0, 2\pi)$ 。

习题 6

设 $\{U_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为独立同 $U(0, 1)$ 分布的随机变量序列。令 M 为序列中第一个比前一个值小的元素的序号, 即

$$M = \min \{m : U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq U_{m-1}, U_{m-1} > U_m, m \geq 2\}$$

- (1) 证明 $P(M > n) = \frac{1}{n!}, n \geq 2$ 。
- (2) 用概率论中的恒等式 $EM = \sum_{n=0}^{\infty} P(M > n)$ 证明 $EM = e$ 。
- (3) 生成 M 的 N 个独立抽样, 用平均值 $\bar{M}$ 估计 e 。
- (4) 估计 $\bar{M}$ 的标准差, 给出 e 的近似 95% 置信区间。

习题 7

设 $X \sim N(0, 1)$, $h(x) = \exp(-\frac{1}{2}(x-3)^2) + \exp(-\frac{1}{2}(x-6)^2)$ 。令 $I = Eh(X)$ 。

- (1) 推导 I 的精确表达式并计算结果。
- (2) 用 $N = 1000$ 次函数计算的平均值法估计 I 并估计误差大小。
- (3) 设计适当的重要抽样方法取 $N = 1000$ 估计 I 并估计误差大小。

习题 8

设随机变量 X 密度函数 $p(x)$ 和分布函数 $F(x)$ 已知, 编写 R 程序, 对 X 的某个随机数发生器产生的序列做拟合优度卡方检验。

习题 9

洗好一副编号分别为 $1, 2, \dots, 54$ 的纸牌, 依次抽取出来, 若第 i 次抽取到编号 i 的纸牌则称为成功抽取。编写程序估计成功抽取个数 T 的期望和方差, 推导理论公式并与模拟结果进行比较。

习题 10

设 $h(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$, $x \in (0, 1)$, 用重要抽样法计算积分 $I = \int_0^1 h(x) dx$, 分别采用如下的试抽样密度:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 1, \quad x \in (0, 1), \\f_2(x) &= e^{-x}, \quad x \in (0, \infty), \\f_3(x) &= \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in (-\infty, \infty), \\f_4(x) &= (1-e^{-1})^{-1}e^{-x}, \quad x \in (0, 1), \\f_5(x) &= \frac{4}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in (0, 1).\end{aligned}$$

- (1) 作 $h(x)$ 和各试抽样密度的图形, 比较其形状。
- (2) 取样本点个数 $N = 10000$, 分别给出对应于不同试抽样密度的估计 $\hat{I}_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, 以及 $\text{Var}(\hat{I}_k)$ 的估计。
- (3) 分析 $\text{Var}(\hat{I}_k)$ 的大小差别的原因。
- (4) 把 $(0, 1)$ 区间均分为 10 段, 在每一段内取 $N = 1000$ 个样本点用平均值法计算积分值, 把各段的估计求和得到 I 的估计 $\hat{I}_6$, 估计其方差。
- (5) 用例 13.2 的分层抽样方法计算积分的估计 $\hat{I}_7$, 估计 $\text{Var}(\hat{I}_7)$ 并与前面的结果进行比较。